Leçon 171 - Formes quadratiques réelles.

Cadre : On se place sur un espace vectoriel réel E de dimension finie n.

1. Formes quadratiques et algèbre bilinéaire. —

1. Définitions et premières propriétés. —

- Def : b forme bilinéaire symétrique sur E, q forme quadratique sur E. b est appelée forme polaire de q.
- Ex : $q((x,y,z)) = xy + yz + zx$ sur $\mathbb{R}^3$, $q(x) =< x, x >$ sur $\mathbb{R}^n$.
- Pro : Une forme quadratique possède une unique forme polaire.
- Pro : Identités de polarisation : $b(x,y) = \frac{q(x+y)-q(x)-q(y)}{2} = \frac{q(x)+q(y)-q(x-y)}{2} = \frac{q(x+y)-q(x-y)}{4}$
- Ex : $A \mapsto Tr(A^t.A)$ sur $M_n(\mathbb{R})$.

2. Forme matricielle associée à une forme quadratique. —

- Pro : Pour B une base de E, on a une unique matrice A telle que $b(x,y) = x^t.A.y$.
- Def : Pour q une forme quadratique sur E et B une base de E, la forme matricielle associée à q sur B est $A := Mat(b, B)$.
- Rem : La dimension de l'espace des formes quadratiques sur E est donc $\frac{n(n+1)}{2}$.
- Pro : Pour $\widetilde{B}$ une autre base de E, P la matrice de passage de B vers $\widetilde{B}$, et A,$\widetilde{A}$ les formes matricielles associées à q sur B,$\widetilde{B}$, on a : $\widetilde{A} = P.A.P^{-1}$.
- Def : Le rang de q, rg(q), est le rang de sa forme matricielle associée sur une base B.
- Rem : Le rang de q est indépendant de la base considérée.
- Def : Le noyau de q, N(q), est $Ker(x \mapsto (y \mapsto b(x,y)))$. C'est l'ensemble des $x \in E$ tq $b(x,.)$ est la forme linéaire nulle.
- Def : Si $N(q) = \{0\}$, on dit que q est non-dégénérée. Elle est dégénérée sinon.
- Pro : q est non-dégénérée $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$.
- Pro : $dim(E) = rg(q) + dim(N(q))$.
- Exemple matriciel. Reprendre l'exemple d'avant.

3. Formes quadratiques positives, définies positives. —

- Def : Forme quadratique positive, définie positive.
- Pro : Si q est non-dégénérée, alors elle est définie.
- Contre-ex : $q((x,y)) = 2xy$ n'est pas définie, mais est non-dégénérée.
- Pro : (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Pour q positive, on a $b(x,y)^2 \leq q(x)q(y)$. Si q est définie positive, on a égalité ssi x et y sont positivement liés.
- Pro : (Inégalité de Minkowski) Si q est positive, $\sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$.

2. Orthogonalité et isotropie. —

1. Orthogonalité, bases orthogonales. —

- Def : On dit que $x \perp_q y$ ssi $b(x,y) = 0$. On définit $A^{\perp_q} := \{x \in E \text{ tq } b(x,y) = 0 \forall y \in A\}$. On dit que $A \perp_q B$ ssi $b(x,y) = 0 \forall x \in A, y \in B$.
- Pro : $A^{\perp_q}$ est un s-ev de E. On a $A \subset (A^{\perp_q})^{\perp_q}$. De plus, $A \subset B \Rightarrow B^{\perp_q} \subset A^{\perp_q}$.
- Pro : $E^{\perp_q} = N(q)$.
- Def : Une base de E $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base $q-orthogonale$ de E ssi les x_i sont q-orthogonaux deux à deux.
- Rem : Dans une telle base, la forme matricielle de q est diagonale.
- Thm : Toute forme quadratique q sur E possède une base q-orthogonale.
- Pro : Pour F un s-ev, on a $dim(F) + dim(F^{\perp_q}) = dim(E) + dim(F \cap N(q))$, et $(F^{\perp_q})^{\perp_q} = Vect(F, N(q))$.

2. Groupe orthogonal associé à une forme quadratique. —

- On veut étudier les éléments de $End(E)$ qui préservent q.
- Def : On note $O(q)$ l'ensemble de $f \in End(E)$ tels que $q \circ f = f$.
- Pro : $O(q)$ est un groupe.
- Pro : Pour B une base de E, A la forme matricielle de q et $M := Mat(f, b)$, on a $f \in O(q) \Leftrightarrow M^t.A.M = A$.
- Pro : Si $f \in O(q)$, alors son adjoint f^* est dans $O(q)$.
- Ex : Pour $q(x) =< x, x >$, $f \in O(q)$ ssi $f \circ f^* = id_E$, càd ssi $M = Ma(f, B)$ vérifie $M^t.M = I_n$.
- Ex : $q((x,y)) = 2xy$. La base $B := \{(1,1),(1,-1)\}$ est q-orthogonale, et $f \in O(q)$ ssi $M = Mat(f, B)$ vérifie.

3. Isotropie. —

- Def : Le cône isotrope I de q est $\{x \in E \text{ tq } q(x) = 0\}$.
- Pro : On a $N(q) \subset I$. I est stable par multiplication par un scalaire, mais il n'est pas stable par addition.
- Contre-ex : $q((x,y)) = 2xy$. On a $(0,1),(1,0) =\in I$ mais $(1,1) \notin I$.
- Def : Un s-ev F de E est isotrope ssi l'intersection de F et de $F^{\perp_q}$ est non-réduite à $\{0\}$. F est anisotrope sinon. On dit que F est totalement isotrope si $F \subset F^{\perp_q}$.
- Rem : Si F est anisotrope, alors $dim(E) = dim(F) + dim(F^{\perp_q})$
- Pro : Caractérisations de l'isotropie/l'isotropie totale.
- Ex : Pour $q((x,y,z)) = 2yz$, $F = Vect((1,0,0),(0,1,0))$ est totalement isotrope. $F_2 = Vect((0,1,1))$ est anisotrope.

3. Réduction des formes quadratiques. —

1. Théorème d'inertie de Sylvester. —

- Méthode de Gauss.
- Rem : Cela permet de construire des bases q-orthogonales.
- Ex : Un exemple.
- Ex : $q((x,y,z)) = xy + yz + zx$.

- Théorème d'inertie de Sylvester : Si q est de rang r, alors on a un $0 \leq p \leq r$ et une base B de E dans laquelle q s'écrit : $x \mapsto x_1^2 + \cdots + x_p^2 - (x_{p+1}^2 + \cdots + x_r^2)$.
  On dit alors que q est de signature $(p, r-p)$ et ce couple ne dépend que de q.
- Cor : Définition de la signature.
- App : Lien entre signature et positivité/non-dégénérescence.
- Rem : Dans l'étude du groupe orthogonal, on peut s'intéresser à $O(sign(q))$ plutôt que $O(q)$ car ces groupes sont conjugués.
- App : Il y a n+1 classes d'équivalences de formes quadratiques non-dégénérées sur $\mathbb{R}^n$.
- **Dev** : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n, et de racines complexes $\lambda_1, \dot{;} \lambda_r$, de multiplicités $\alpha_1, \dot{;} \alpha_r$.
  On pose $s_l := \sum_{i \geq r} \alpha_i \lambda_i^l$ pour $l \geq 0$, et $S_n((x_1, \dot{;} x_n)) := \sum_{i,k \leq n} s_{i+k} x_i . x_k$, qui est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$.
  Si (p,q) est la signature de S_n, alors P possède $p+q$ racines distinctes, dont $p-q$ exactement sont réelles.

2. *Réduction sur un espace euclidien.* —

- Théorème de réduction simultanée .
- Application de la méthode de réduction simultanée sur un exemple.
- Rem : Cette méthode est moins efficace que la méthode de Gauss mais permet d'avoir une base orthogonale à la fois pour q et pour le produit scalaire ambiant.
  Elle est utile pour déterminer la forme d'une quadrique sur une base orthonormée sans avoir à la dilater/contracter.

4. Application à la géométrie. —

1. *Coniques du plan euclidien.* —

- Def : Conique. Faire un tableau rang/signature/nom des coniques, avec des dessins en annexe.
- Pro : Par 5 points du plan passe une conique. Elle est unique ssi aucun sous-ensemble de 4 points parmi les 5 n'est aligné.
- **Dev :** (Corollaire du théorème de Pascal) Soient A,B,C trois points du plan non-alignés. Soient M,N des points du plan tels que les droites (AM),(BM),(CM), coupent respectivement les droites (BC),(AC)(AB) en des points M_A,M_B,M_C et que les droites (AN),(BN),(CN), coupent respectivement les droites (BC),(AC)(AB) en des points N_A,N_B,N_C.
  Alors il existe une conique passant par M_A,M_B,M_C,N_A,N_B,N_C.

2. *Etude de la hessienne.* —

- Def : Pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable, on appelle hessienne de f la différentielle seconde de f, notée $D_x^{(2)}(f)(.,.)$.
- Pro : C'est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$, dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $(\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial}{\partial x_j} f))_{i,j}$.
- Théorème de Schwarz : $D_x^{(2)}(f)(.,.)$ est symétrique.
- On peut ainsi associer à la hessienne de f une forme quadratique.
- Thm : f admet un maximum/minimum local ssi $D_x(f) \equiv 0$ et si $D_x^{(2)}(f)$ est positive/négative.
- On peut ainsi étudier les extrema d'une fonction 2 fois différentiable f en regardant les x pour lesquels $D_x(f)$ est nulle, puis en étudiant la signature de $D_x^{(2)}(f)$.
- Ex : $f(x) = < Ax, x > - < b, x >$ avec A symétrique définie positive. $D_x(f)(h) = 2 < Ax, h > - < b, h > = < (2Ax + b), h >$ s'annule en $x_0 = -\frac{1}{2} A^{-1}.b$. Et $D_{x_0}^2(f)(h,h) = < Ah, h >$ définie positive. Donc f admet un minimum global qui est atteint.
- **Dev :** Lemme de Morse : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^3. Soit $x \in U$ tq $D_x(f) = 0$, et soit (p,q) la signature de la hessienne de f, $D_x^2(f)$.
  Alors il existe un voisinage V de x, W un voisinage de 0, et $g : V \to W$ un C^1-difféomorphisme tel que $\forall y \in W$, $f(g^{-1}(y)) = f(x) + y_1^2 + \cdots + y_p^2 - (y_{p+1}^2 + \cdots + y_{p+q}^2)$.
- App : Equation de la tangente en un point double dans $\mathbb{R}^2$.
- App : Etude locale d'une surface par rapport à son plan tangent via une forme quadratique.

Grifone : Rang et noyau d'une forme quadratique. Groupe orthogonal de q. Isotropie. Méthode de Gauss, exemple, Théorème de Sylvester, signature. Théorème de réduction simultanée, méthode, exemple. Classification des coniques.
Gourdon : Def forme bilin sym, quadratique, forme polaire, forme matricielle. Formes quadratiques positives, définies, Schwarz, Minkowski. Orthogonalité et bases q-orthogonales.
Rouvière : Hessienne, étude des extrema locaux. Lemme de Morse.(Dev)
Eiden : Corollaire du théorème de Pascal.(Dev)
Gantmacher (Tome 2) : Détermination du nombre de racines réelles distinctes d'un polynôme.(Dev)

May 30, 2017
Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes